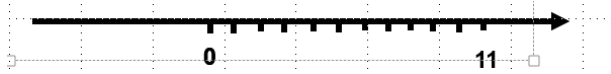


### Практикум по решению задачи №21 (базовый уровень)

**Тип 1.** Кузнечик прыгает вдоль координатной прямой в любом направлении на единичный отрезок за один прыжок. Кузнечик начинает прыгать из начала координат. Сколько существует различных точек на координатной прямой, в которых кузнечик может оказаться, сделав ровно 11 прыжков?

Решение.



Заметим, что кузнечик может оказаться только в точках с нечётными координатами, т.к. количество прыжков, которое он делает, — нечётно. Максимально кузнечик может оказаться в точках, модуль которых не превышает одиннадцати. Таким образом, кузнечик может оказаться в точках:  $-11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$  и  $11$ ; всего 12 точек.

**Ответ: 12**

**Тип 2.** Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 3 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка впервые доползёт до вершины дерева?

Решение.

За день улитка заползёт на 4 метра, а за ночь — сползёт на 3 метра. Итого за сутки она заползёт на метр.

За шестеро суток она поднимется на высоту шести метров. И днём следующего дня она уже окажется на вершине дерева.

**Ответ: 7**

**Тип 3.** Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире № 462, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Решение.

Поскольку в первых 7 подъездах не меньше 462 квартир, в каждом подъезде не меньше  $462 : 7 = 66$  квартир. Следовательно, на каждом из 7 этажей в подъезде не меньше 9 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 9 квартир. Тогда в первых семи подъездах всего  $9 \cdot 7 \cdot 7 = 441$  квартира, и квартира 462 окажется в восьмом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 10 квартир. Тогда в первых семи подъездах  $10 \cdot 7 \cdot 7 = 490$  квартир, а в первых шести — 420. Следовательно, квартира 462 находится в седьмом подъезде. Она в нем 42-ая по счету, поскольку на этаже по 10 квартир, она расположена на пятом этаже.

Если бы на каждой площадке было по 11 квартир, то в первых шести подъездах оказалось бы  $11 \cdot 7 \cdot 6 = 462$  квартиры, то есть 462 квартира в шестом подъезде, что противоречит условию.

Значит Саша живёт на пятом этаже.

**Ответ: 5**

**Тип 4.** В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- за 2 золотых монеты получить 3 серебряных и одну медную;
- за 5 серебряных монет получить 3 золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Решение.

Пусть Николай сделал сначала  $x$  операций второго типа, а затем  $y$  операций первого типа. Тогда имеем:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0, & \text{количество золотых монет не изменилось,} \\ x + y = 50, & \text{медных стало на 50 больше.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 30. \end{cases}$$

Тогда серебряных монет стало на

$$3y - 5x = 90 - 100 = -10 \quad \text{т.е. на 10 меньше.}$$

**Ответ: 10**

**Тип 5.** Хозяин договорился с рабочими, что они копают колодец на следующих условиях: за первый метр он заплатит им 3500 рублей, а за каждый следующий метр — на 1600 рублей больше, чем за предыдущий. Сколько денег хозяин должен будет заплатить рабочим, если они выкопают колодец глубиной 9 метров?

Решение.

Последовательность цен за метр — арифметическая прогрессия с первым элементом 3500 и разностью 1600. Сумма первых элементов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}.$$

То есть в нашем случае имеем  $S_9 = \frac{9 \cdot (2 \cdot 3500 + 8 \cdot 1600)}{2} = 89100$  **Ответ: 89100**

**Тип 6.** В корзине лежат 30 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Решение.

В корзине есть как минимум 19 рыжиков. Иначе можно было бы взять 12 груздей и первое условие не выполнялось.

Аналогично из второго условия следует, что в корзине как минимум 11 груздей.

Сопоставляя эти два факта, получим, что в корзине именно 19 рыжиков и 11 груздей.

**Ответ: 19.**

**Тип 7.** На палке отмечены поперечные линии красного, жёлтого и зелёного цвета. Если распилить палку по красным линиям, получится 15 кусков, если по жёлтым — 5 кусков, а если по зелёным — 7 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Решение.



Если распилить палку по красным линиям, то получится 15 кусков, следовательно, линий - 14.

Если распилить палку по желтым - 5 кусков, следовательно, линий - 4.

Если распилить по зеленым - 7 кусков, линий - 6.

Всего линий:  $14+4+6=24$  линии, следовательно, кусков будет 25.

**Ответ: 25**

**Тип 8.** Врач прописал пациенту принимать лекарство по такой схеме: в первый день он должен принять 3 капли, а в каждый следующий день — на 3 капли больше, чем в предыдущий. Приняв 30 капель, он ещё 3 дня пьёт по 30 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает приём на 3 капли. Сколько пузырьков лекарства нужно купить пациенту на весь курс приёма, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 250 капель)?

Решение

1) На первом этапе приёма капель число принимаемых капель в день представляет собой возрастающую арифметическую прогрессию с первым членом, равным 3, разностью, равной 3 и последним членом, равным 30. Следовательно:

$$a_n = 30; a_1 = 3; d = 3 \text{ и знаем, что } a_n = a_1 + d(n-1)$$

Тогда  $3 + 3(n-1) = 30$ ;  $3 + 3n - 3 = 30$ ;  $3n = 30$ ;  $n = 10$ , т.е. прошло 10 дней по схеме увеличения до 30 капель. Знаем формулу суммы ариф. прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Вычислим  $S_{10}$ :

$$S_{10} = \frac{3 + 30}{2} \cdot 10 = 33 \cdot 5 = 165 \text{ (капель)}$$

2) За следующие 3 дня – по 30 капель:  $30 \cdot 3 = 90$  (капель)

3) На последнем этапе приёма:

$$a_1 = 30; d = -3; a_n = 0$$

Т.е.  $30 - 3(n-1) = 0$ ;  $30 - 3n + 3 = 0$ ;  $-3n = -33$ ;  $n = 11$  т.е. 11 дней приём лекарства уменьшался. Найдём сумму арифметич. прогрессии

$$S_{11} = \frac{30 + 0}{2} \cdot 11 = 15 \cdot 11 = 165 \text{ (капель)}$$

4) Значит  $165 + 90 + 165 = 420$  капель всего

5) Тогда  $420 : 250 = 42/25 = 1 (17/25)$  пузырька

**Ответ: надо купить 2 пузырька**

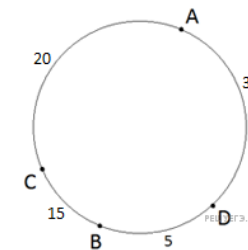
**Тип 9.** На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: А, В, С и D. Расстояние между А и В — 35 км, между А и С — 20 км, между С и D — 20 км, между D и А — 30 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону). Найдите расстояние между В и С. Ответ дайте в км.

Решение.

Расположим А, В, С, D вдоль кольцевой дороги по очереди так, чтобы расстояния соответствовали данным в условии. Всё хорошо, кроме расстояния между D и А. Чтобы оно было таким, каким нужно, подвинем D и поставим между В и А нужным образом.

Тогда между В и С будет 15 км.

**Ответ: 15.**



**Тип 10.** В магазине бытовой техники объём продаж холодильников носит сезонный характер. В январе было продано 10 холодильников, и в три последующих месяца продавали по 10 холодильников. С мая продажи увеличивались на 15 единиц по сравнению с предыдущим месяцем. С сентября объём продаж начал уменьшаться на 15 холодильников каждый месяц относительно предыдущего месяца. Сколько холодильников продал магазин за год?

Решение.

Последовательно рассчитаем сколько холодильников было продано за каждый месяц и просуммируем результаты:

$$10 \cdot 4 + (10+15) + (25+15) + (40+15) + (55+15) + (70-15) + (55-15) + (40-15) + (25-15) = 40 + 25 + 40 + 55 + 70 + 55 + 40 + 25 + 10 = 120 + 110 + 130 = 360$$

**Ответ: 360.**

**Тип 11.** На глобусе фломастером проведены 17 параллелей (включая экватор) и 24 меридиана. На сколько частей проведённые линии разделяют поверхность глобуса?

Меридиан — это дуга окружности, соединяющая Северный и Южный полюсы. Параллель — это окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости экватора.



Решение.

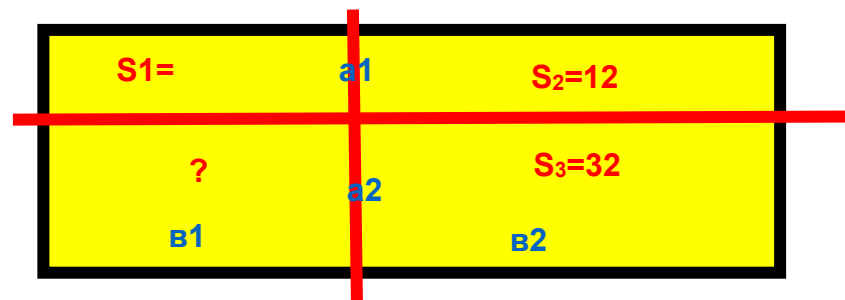
Представим, что на глобусе ещё не нарисованы параллели и меридианы. Заметим, что 24 меридиана разделят глобус на 24 части.

Рассмотрим сектор, образованный двумя соседними меридианами. Проведение первой параллели разделит сектор на две части, проведение второй добавит ещё одну часть, и так далее, таким образом, 17 параллелей разделят сектор на 18 частей.

Следовательно, весь глобус будет разбит на  $24 \cdot 18 = 432$  части.

**Ответ: 432.**

**Тип 12.** Прямоугольник разбит на 4 маленьких прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Площади трёх из них, начиная с верхнего левого и далее по часовой стрелке, равны 9, 12, 32. Найдите площадь четвертого прямоугольника?



$$S? = b_1 \cdot a_2$$

$$1) S1:S2 = (a_1 b_1) : (a_1 b_2) = 9:12 \Rightarrow b_1:b_2 = 9:12,$$

$$b_1 = 3/4 \cdot b_2$$

$$2) S2:S3 = (b_2 a_1) : (b_2 a_2) = 12:32 \Rightarrow a_1 : a_2 = 12 : 32,$$

$$a_2 = 8/3 \cdot a_1$$

$$\text{Тогда } S = 3/4 \cdot b_2 \cdot 8/3 \cdot a_1 = 3/4 \cdot 8/3 \cdot$$

$$(b_2 \cdot a_1) = 2 \cdot 12 = 24 \quad \text{Ответ: 24}$$

**Тип 13.** Произведение десяти идущих подряд чисел разделили на 7. Чему может быть равен остаток?

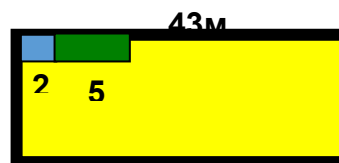
Решение.

Среди 10 подряд идущих чисел одно из них обязательно будет делиться на 7, поэтому произведение этих чисел кратно семи. Следовательно, остаток от деления на 7 равен нулю.

Ответ: 0.

**Тип 14.** Ящики двух видов, имеющие одинаковую ширину и высоту, укладывают на складе в один ряд длиной 43м, приставляя друг к другу по ширине. Ящики одного вида имеют длину 2м, а другого-5м. Какое наименьшее число ящиков потребуется для заполнения всего ряда без образования пустых мест?

Решение.



Т.к. надо найти наименьшее число ящиков, то  $\Rightarrow$  надо взять наибольшее количество больших ящиков. Значит

$$5 \cdot 7 = 35; \quad 43 - 35 = 8 \text{ и } 8:2=4$$

Значит ящиков всего 11. **Ответ: 11.**

**Тип 15.** В таблице три столбца и несколько строк. В каждую клетку таблицы поставили по натуральному числу так, что сумма всех чисел в

первом столбце равна 119, во втором - 125, в третьем - 133, а сумма чисел в каждой строке больше 15, но меньше 18. Сколько всего строк в столбце?

Решение.

Общая сумма во всех столбцах =  $119 + 125 + 133 = 377$

Числа 18 и 15 не включены в предел, значит:

1) если сумма в строке = 17, то, количество строк равно  $377 : 17 = 22,2$

2) если сумма в строке = 16, то, количество строк равно  $377 : 16 = 23,5$

Значит кол-во строк = 23 (т.к. оно должно быть между 22,2 и 23,5)

**Ответ: 23**

**Тип 16.** Список заданий викторины состоял из 36 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 5 очков, за неправильный ответ с него списывали 11 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 75 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Решение.

Пусть  $x$  – количество верных ответов

$y$  – количество неверных ответов.

Тогда составим уравнение  $5x - 11y = 75$ , где  $0 < x < 36$  и  $0 < y < 36$ . Из уравнения видно, что  $y$  делится на 5.

Пусть: 1)  $y=5$ , тогда  $5x = 75 + 11y = 75 + 55 = 130$ , тогда  $x = 130 : 5 = 26$  и это меньше 36.

2)  $y=10$ , тогда  $5x = 75 + 11y = 75 + 110 = 185$ , тогда  $x = 185 : 5 = 37$

**Ответ: 26**

### Нетиповые задачи

1. В меню ресторана имеется 6 видов салатов, 3 вида первых блюд, 5 видов вторых блюд и 4 вида десерта. Сколько вариантов обеда из салата, первого, второго и десерта могут выбрать посетители этого ресторана?

Решение.

Салат можно выбрать шестью способами, первое — тремя, второе — пятью, десерт — четырьмя. Следовательно, всего  $6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 360$  вариантов обеда.

**Ответ: 360.**

2. Каждую секунду бактерия делится на две новые бактерии. Известно, что весь объём одного стакана бактерии заполняют за 1 час. За сколько секунд бактерии заполняют половину стакана?

Решение.

Заметим, что каждую секунду в стакане становится в два раза больше бактерий. Т.е. если в какой-то момент бактериями заполнена половина

стакана, то через секунду будет заполнен весь стакан. Таким образом, полстакана будет заполнено через 59 минут и 59 секунд,

т. е. через  $59 \cdot 60 + 59 = 3599$  секунд.

**Ответ: 3599**

3. В первом ряду кинозала 24 места, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в восьмом ряду?

Решение.

Число мест в ряду представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом 24 и разностью 2.

Член арифметической прогрессии с номером 8 может быть найден по формуле  $a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$ .

$a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot d = 24 + 7 \cdot 2 = 38$ .

**Ответ: 38.**

4. Группа туристов преодолела горный перевал. Первый километр подъёма они преодолели за 50 минут, а каждый следующий километр проходили на 15 минут дольше предыдущего. Последний километр перед вершиной был пройден за 95 минут. После десятиминутного отдыха на вершине туристы начали спуск, который был более пологим. Первый километр после вершины был пройден за час, а каждый следующий на 10 минут быстрее предыдущего. Сколько часов группа затратила на весь маршрут, если последний километр спуска был пройден за 10 минут.

Решение.

На подъём в гору группа затратила 290 минут, на отдых 10 минут, на спуск с горы 210 минут. В сумме туристы затратили на весь маршрут 510 минут. Переведём 510 минут в часы и получим, что за 8,5 часов туристы преодолели весь маршрут.

**Ответ: 8,5.**

5. В бак для полива объемом 10,2 куб. м насос непрерывно закачивает 1,2 кубометра воды каждый час. Но в днище бака есть небольшое отверстие, через которое каждую минуту вытекает 3 литра. За сколько часов пустой бак будет заполнен полностью?

Решение.

1 куб. м = 1000 литров. Объем бака равен  $10,2 \cdot 1000 = 10200$  л.

Каждый час насос закачивает  $1,2 \cdot 1000 = 1200$  литров. И так как каждую минуту из бака вытекает 3 литра, то за час из бака вытекает  $3 \cdot 60 = 180$  л. Значит, каждый час бак наполняется на  $1200 - 180 = 1020$  л.  $10200 : 1020 = 10$ , т.е. пустой бак будет заполнен полностью за 10 часов.

**Ответ: 10.**