ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

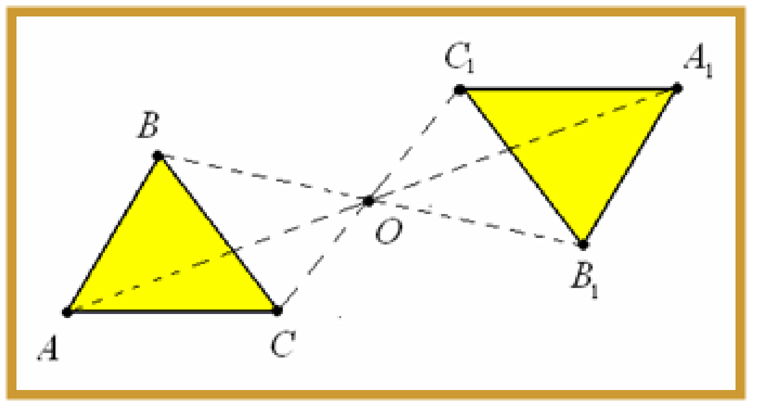
11 класс.

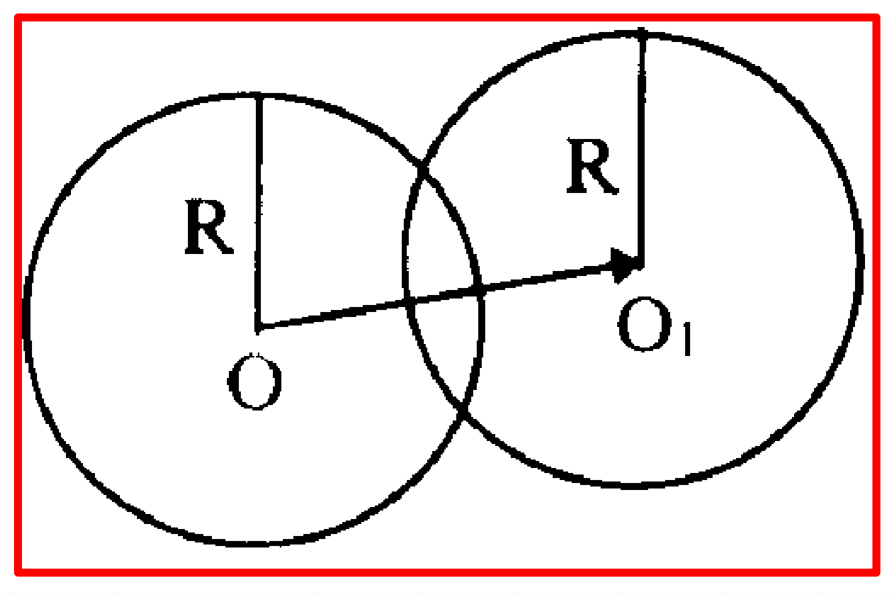
Открытый урок преподавателя математики ГБНОУ СПБ «Санкт-Петербургский музыкальный лицей» Мурысиной Т.М.

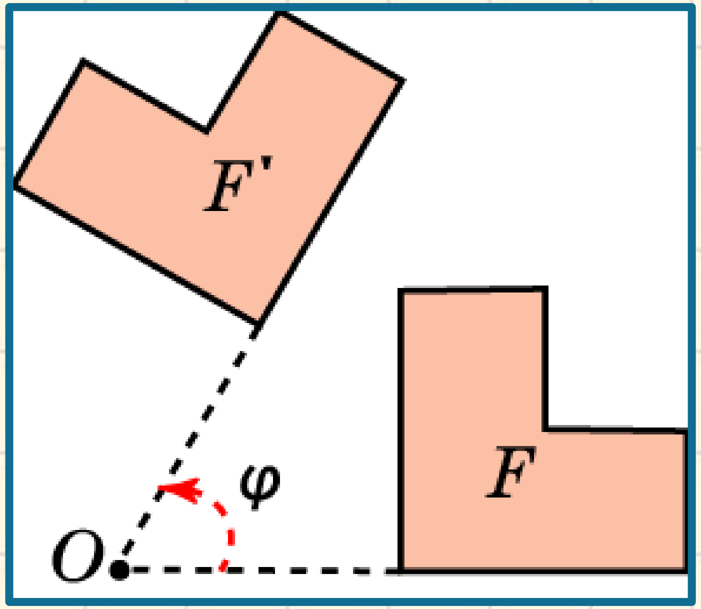
ПОВТОРЕНИЕ

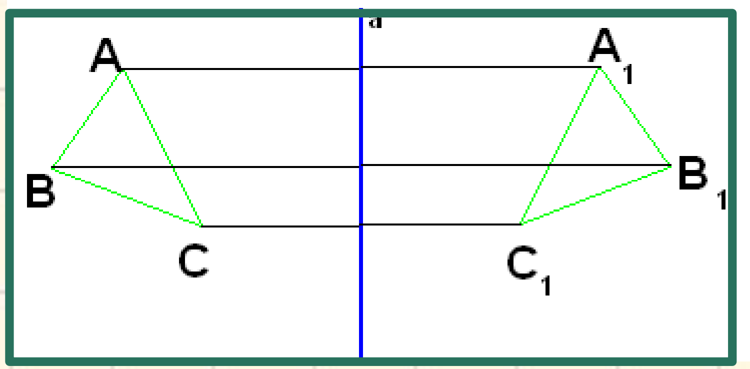
Движение плоскости — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния между точками.

Виды движения на плоскости: **центральная** и **осевая** симметрии, **параллельный перенос**, **поворот**.





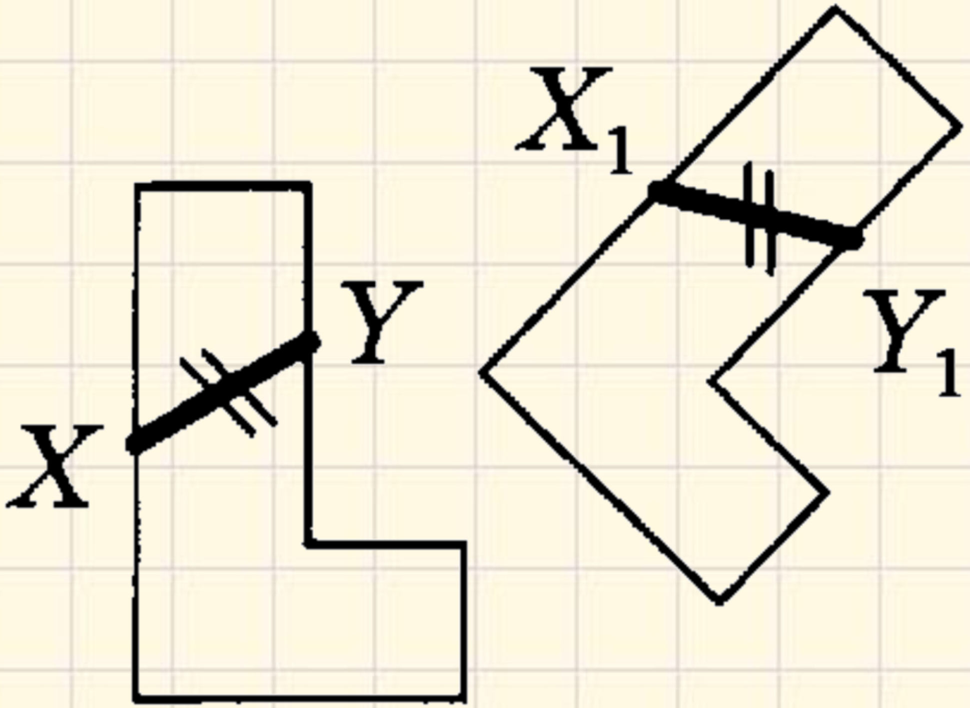




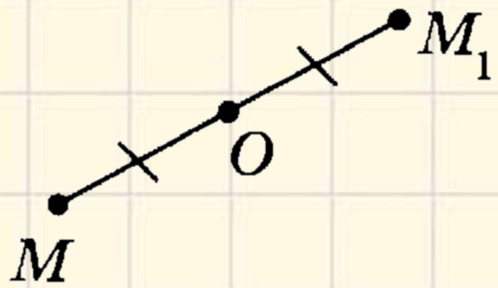
ДВИЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА

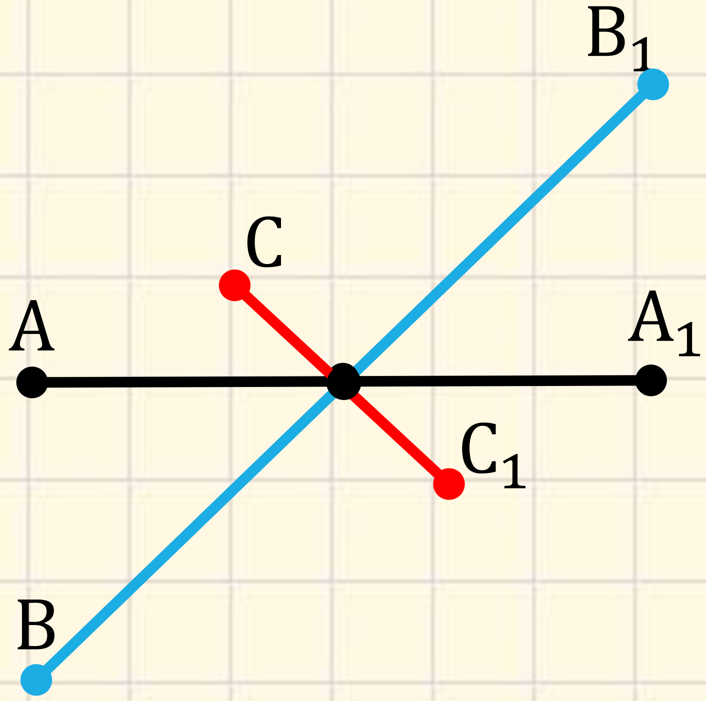
Отображением пространства на себя называется соответствие, при котором каждой точке пространства M соответствует некоторая точка M_1, причем любая точка M_1 поставлена в соответствие некоторой точке M.

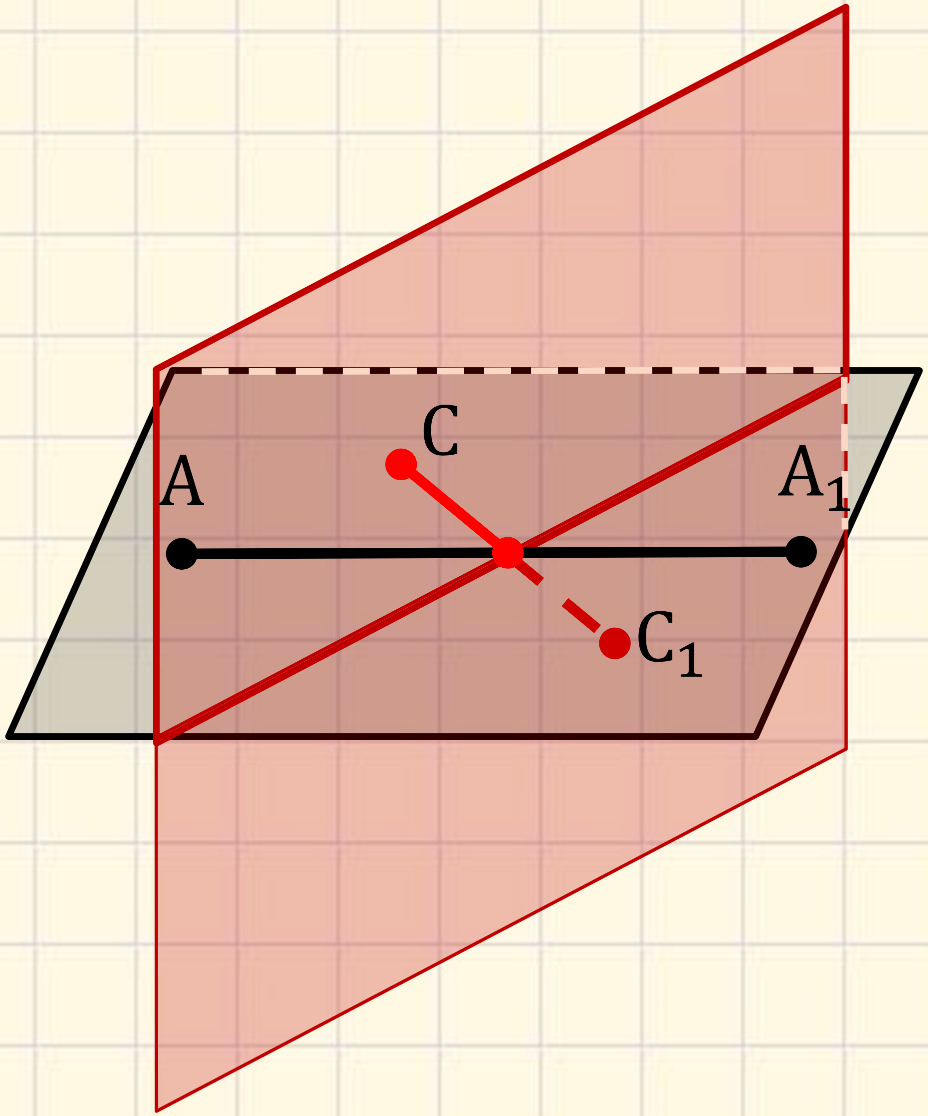
Движением пространства называется отображение пространства на себя, сохраняющее расстояние между точками.



ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

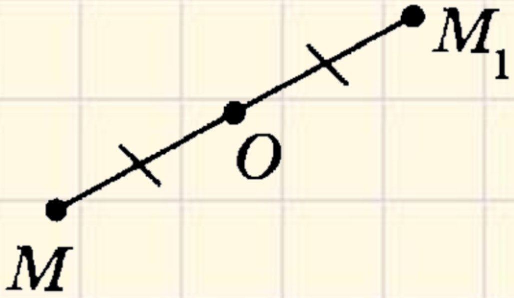


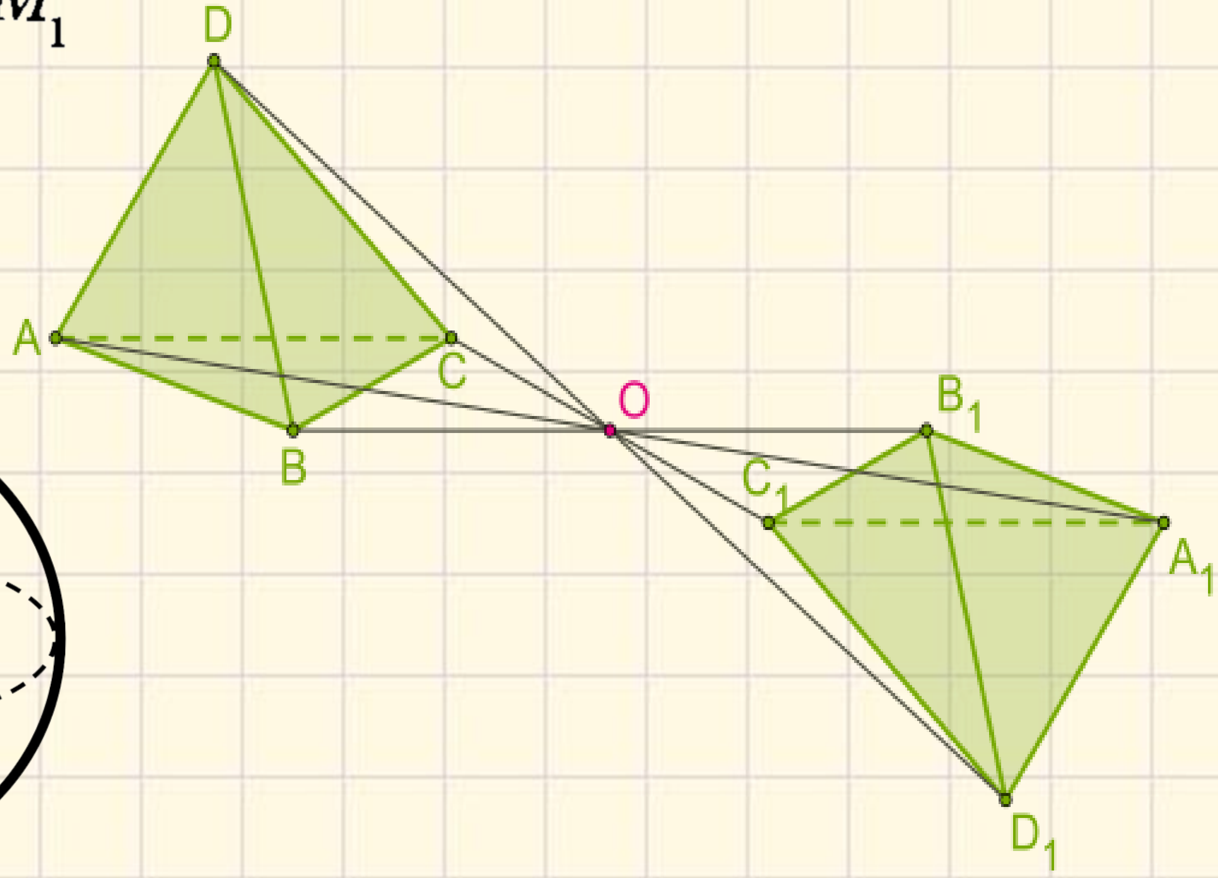


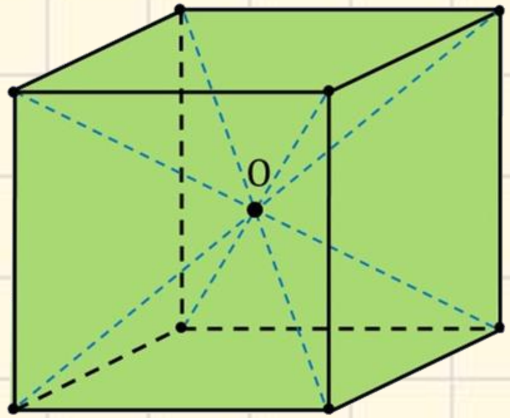


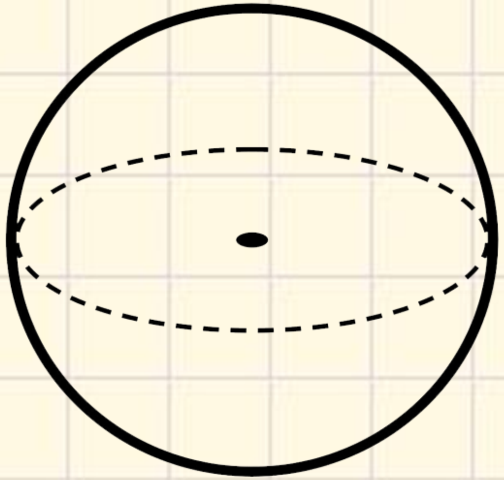
ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Центральной симметрией называется отображение пространства на себя, при котором любая точка М отображается на точку M_1 симметричную М относительно данной точки О (центра симметрии).









Центральная симметрия в пространстве является движением.

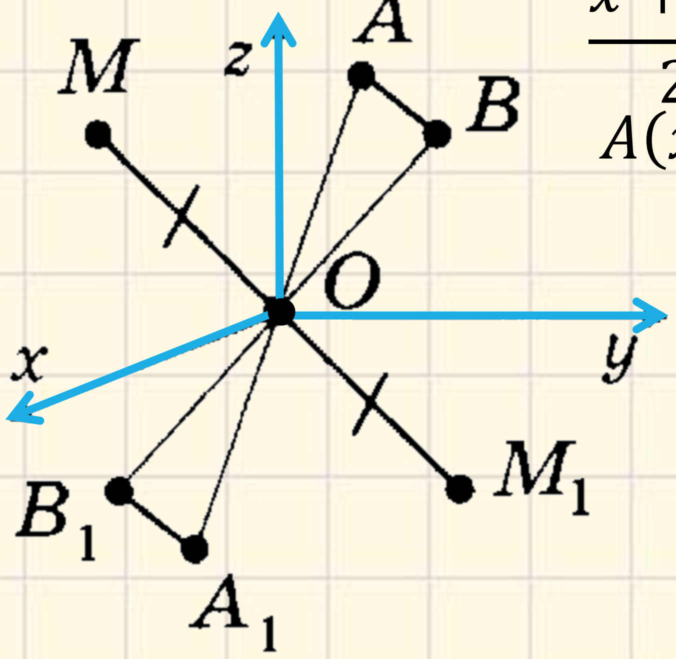
Доказательство

1) Введем прямоугольную систему координат так, чтобы O – центр симметрии совместился с началом координат.

2) Установим связь между координатами точек M и M_1.

3) Докажем равенство отрезков $AB=A_1B_1$.

O(0,0,0) $M(x,y,z)$ $M_1(x_1,y_1,z_1)$, так как O – середина MM_1, имеем:



$$\frac{x+x_1}{2}=0;\ \frac{y+y_1}{2}=0;\ \frac{z+z_1}{2}=0 \text{ или } x=-x_1; y=-y_1; z=-z_1.$$

$A(x,y,z); B(x_1,y_1,z_1)$, *тогда* $A_1(-x,-y,-z); B_1(-x_1;-y_1;-z_1)$

$$AB=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}$$

$$A_1B_1=\sqrt{(-x_1-(-x)^2+\left(-y_1-(-y)\right)^2+\left(-z_1-(-z)\right)^2} \text{ или}$$

$$A_1B_1=\sqrt{(-x_1+x)^2+(-y_1+y)^2+(-z_1+z)^2}$$

$AB=A_1B_1$ что и требовалось доказать.

ТИПОВАЯ ЗАДАЧА

При центральной симметрии точка $\boldsymbol{A}$(2; -5; 3) отображается на точку $\boldsymbol{A_1}$(-4; 1; 7). Определите, на какую точку при симметрии с тем же центром отображается точка $\boldsymbol{B}$(0; 1; -1).

Решение

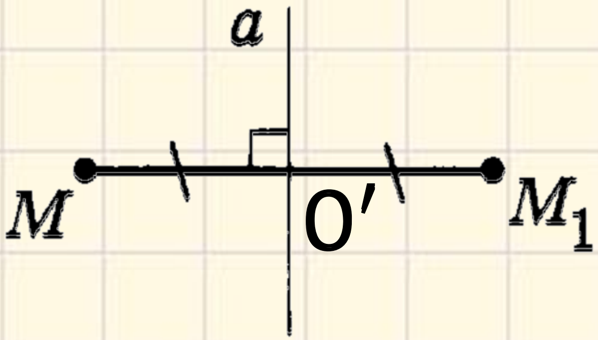
Пусть $\boldsymbol{O}(x; y; z)$ центр симметрии, а $\boldsymbol{B_1}(x_1; y_1; z_1)$ точка на которую при симметрии с тем же центром отображается точка $\boldsymbol{B}$.

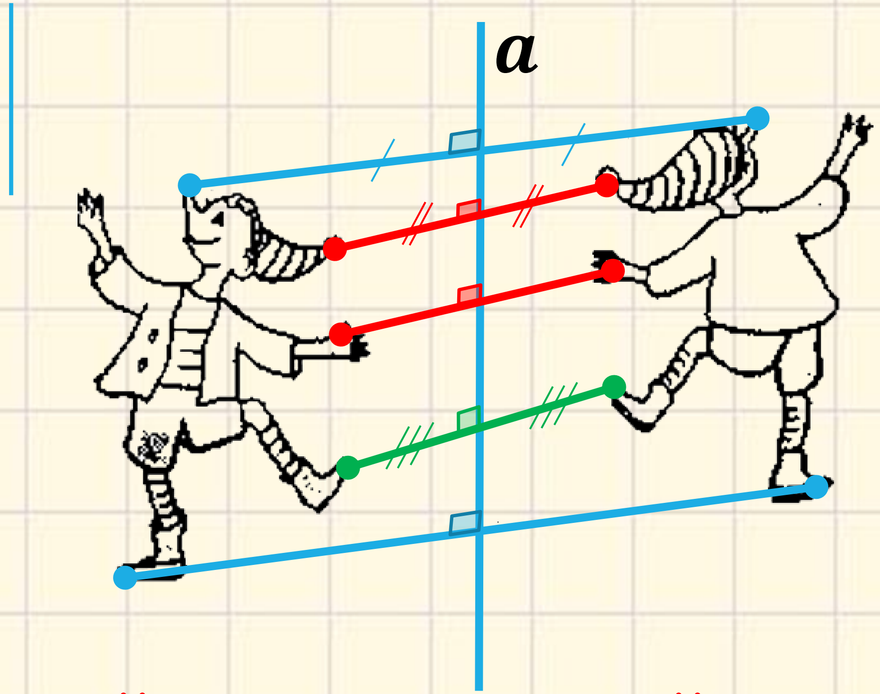
$$x = \frac{2 + (-4)}{2} = -1; y = \frac{-5 + 1}{2} = -2; z = \frac{3 + 7}{2} = 5; \boldsymbol{O}(-1; -2; 5)$$

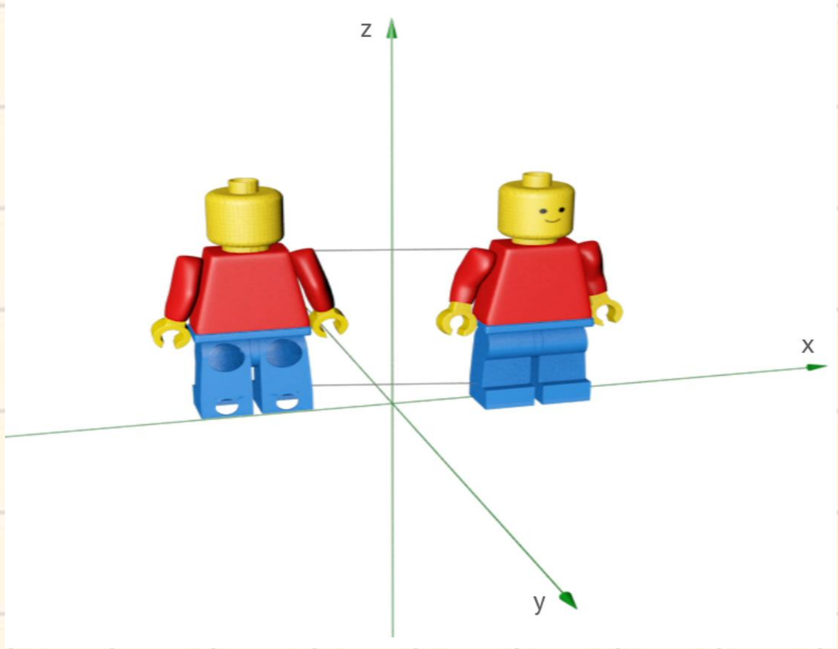
$$-1 = \frac{0 + x_1}{2}; -2 = \frac{1 + y_1}{2}; 5 = \frac{-1 + z_1}{2}; \; x_1 = -2; \; y_1 = -5; \; z_1 = 11$$

Ответ: $\boldsymbol{B_1}(-2; -5; 11)$

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ







Осевой симметрией называется отображение пространства на себя, при котором любая точка M отображается на точку M_1 симметричную M относительно данной прямой *a* (оси симметрии).

Осевая симметрия в пространстве является движением.

Доказательство

1) Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Oz совпала с осью симметрии.

2) Установим связь между координатами точек M и M_1

3) Докажем равенство отрезков $AB=A_1B_1$

$MM_1 \cap Oz = O'; MM_1 \perp Oz; O'(0,0,z); M(x,y,z); M_1(x_1,y_1,z)$

Поясните почему точки O', M и M_1 имеют одинаковую аппликату.

$MO'=O'M_1 \quad \frac{x+x_1}{2}=0; \frac{y+y_1}{2}=0;$ или $x=-x_1; y=-y_1$

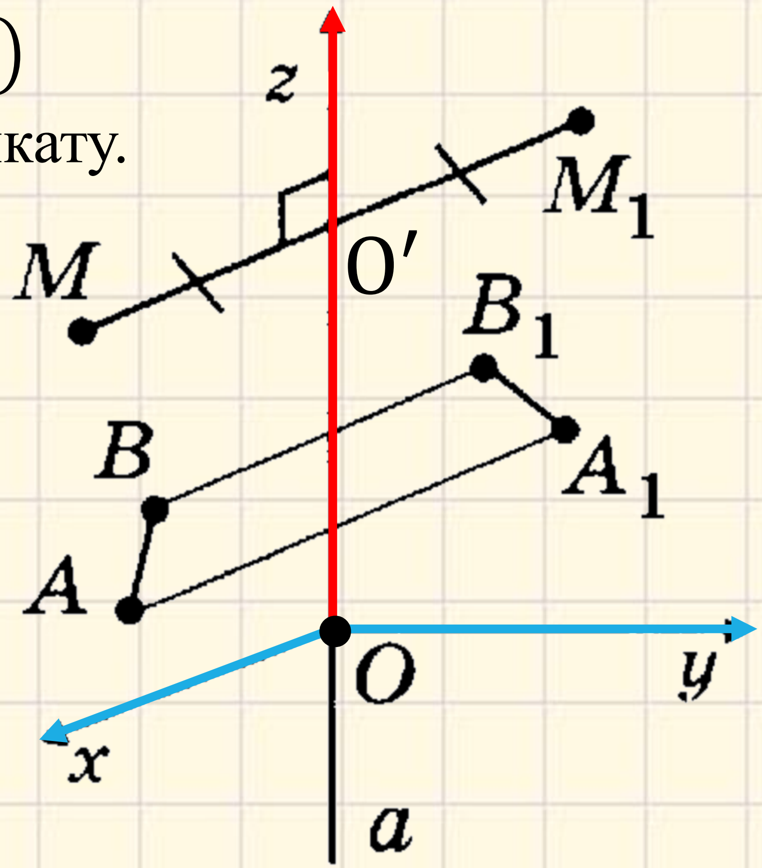
$A(x,y,z); B(x_1,y_1,z_1),$ *тогда* $A_1(-x,-y,z); B_1(-x_1;-y_1;z_1)$

$$AB=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}$$

$$A_1B_1=\sqrt{(-x_1-(-x))^2+\left(-y_1-(-y)\right)^2+(z_1-z)^2}$$ или

$$A_1B_1=\sqrt{(-x_1+x)^2+(-y_1+y)^2+(z_1-z)^2}$$

$AB=A_1B_1$ что и требовалось доказать.



ТИПОВАЯ ЗАДАЧА

При симметрии относительно оси ординат точка $\boldsymbol{A}$ отображается на точку $\boldsymbol{A_1}$(-4; 4; 3). Найдите длину отрезка $\boldsymbol{AA_1}$.

Решение

Определим координаты точки $\boldsymbol{A}$, так как ось симметрии Оу, то ординаты у точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A_1}$ равны, а абсцисса и аппликата поменяют свой знак.

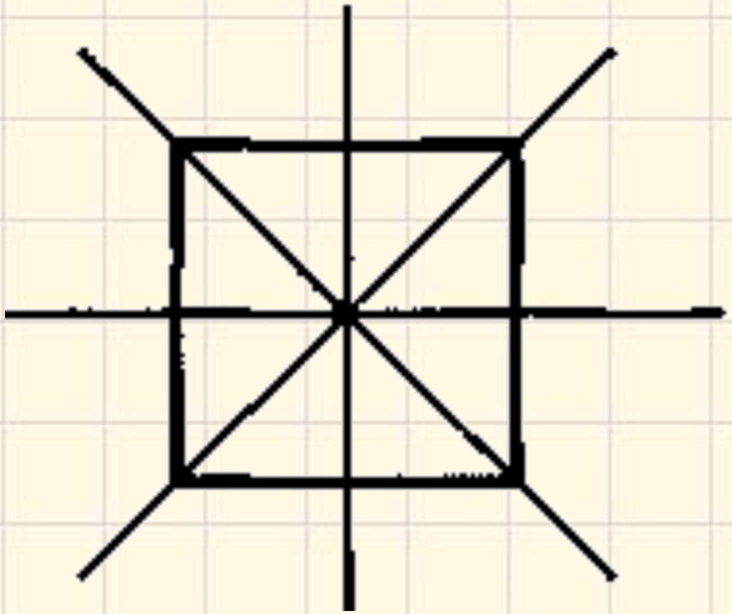
$\boldsymbol{A}$(4; 4; -3) $\boldsymbol{A_1}$(-4; 4; 3)

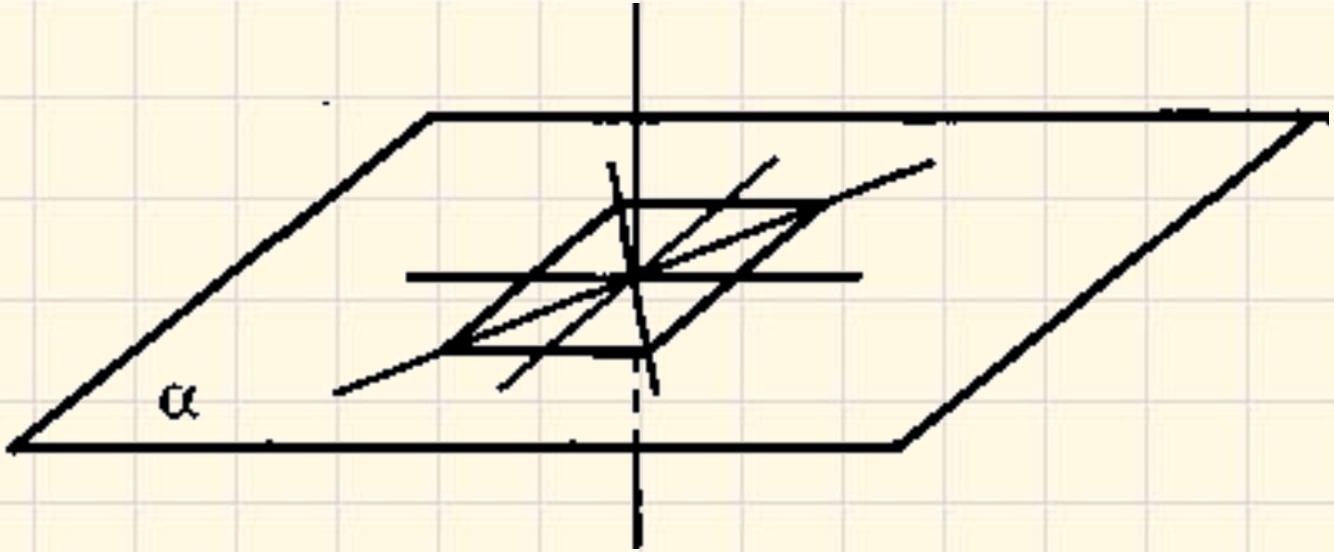
$$AA_1 = \sqrt{(-4-4)^2 + (4-4)^2 + \left(3-(-3)\right)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

Ответ: 10

Вопрос

Сколько осей симметрии у квадрата?





Ответ: на плоскости 4, в пространстве 5.