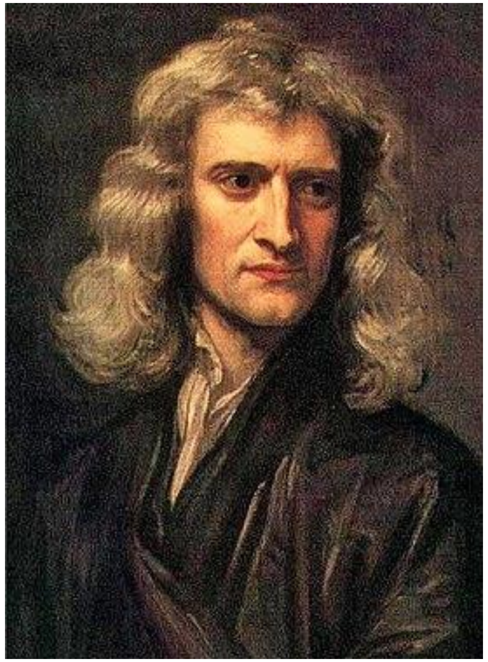
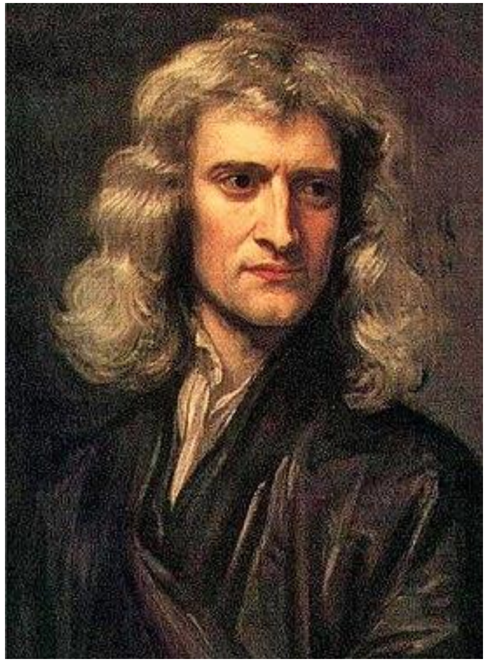
Вычисление интегралов



Исаак Ньютон (1642-1727) – математик, физик, астроном, механик. Сформулировал закон о всемирном тяготении, автор трех законов механики, вошедших в основу классической механики. Ему принадлежит разработка интегрального и дифференциального исчисления и теория цвета.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (нем. Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 — 1716) — немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед.

Вычисление интегралов



Ньютон и Лейбниц независимо друг от друга открыли формулу известную нам под названием **Формула Ньютона – Лейбница**.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Полярные точки зрения по поводу приоритета Ньютона или Лейбница высказывались вплоть до начала XX века. Современные исследователи пришли к выводу о том, что Ньютон и Лейбниц совершили свои открытия независимо друг от друга.

Физический смысл интеграла

Ньютоном были сформулированным **две основные проблемы** (физический смысл):

1. Длина проходимого пути постоянно дана, требуется найти скорость движения в момент времени t (дифференциальное исчисление – мгновенная скорость – это производная пути)

2. Скорость движения постоянно дана, требуется найти скорость движения в предложенное время, т.е. S(t).

Вторая проблема обратная первой – это задача найти путь по заданной скорости, т.е. найти такую функцию S(t) производная которой равна v(t), или $S'(t) = v(t)$, тогда эту функцию называют первообразной v(t), а сам процесс нахождения – **интегрированием.**

Задача 1

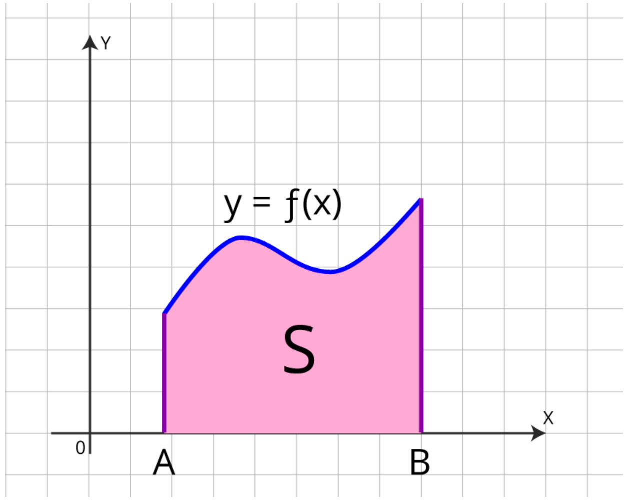
Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна v(t)=2t. Найдите путь, пройденный точкой за время от 3 до 7 с, если скорость измеряется в метрах в секунду.

Решение

$$\mathrm{S(t)} = \int_3^7 2t\,dt = t^2 \Big|_3^7 = 49 - 9 = 40 \ \text{(метров)}$$

Ответ: 40 метров

Геометрический смысл интеграла



Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [a; b] знака функции f(x), прямыми x=a, x=b и отрезком [a; b]. Отрезок **[a; b]** называют **основанием** этой криволинейной трапеции.

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

№ 1013

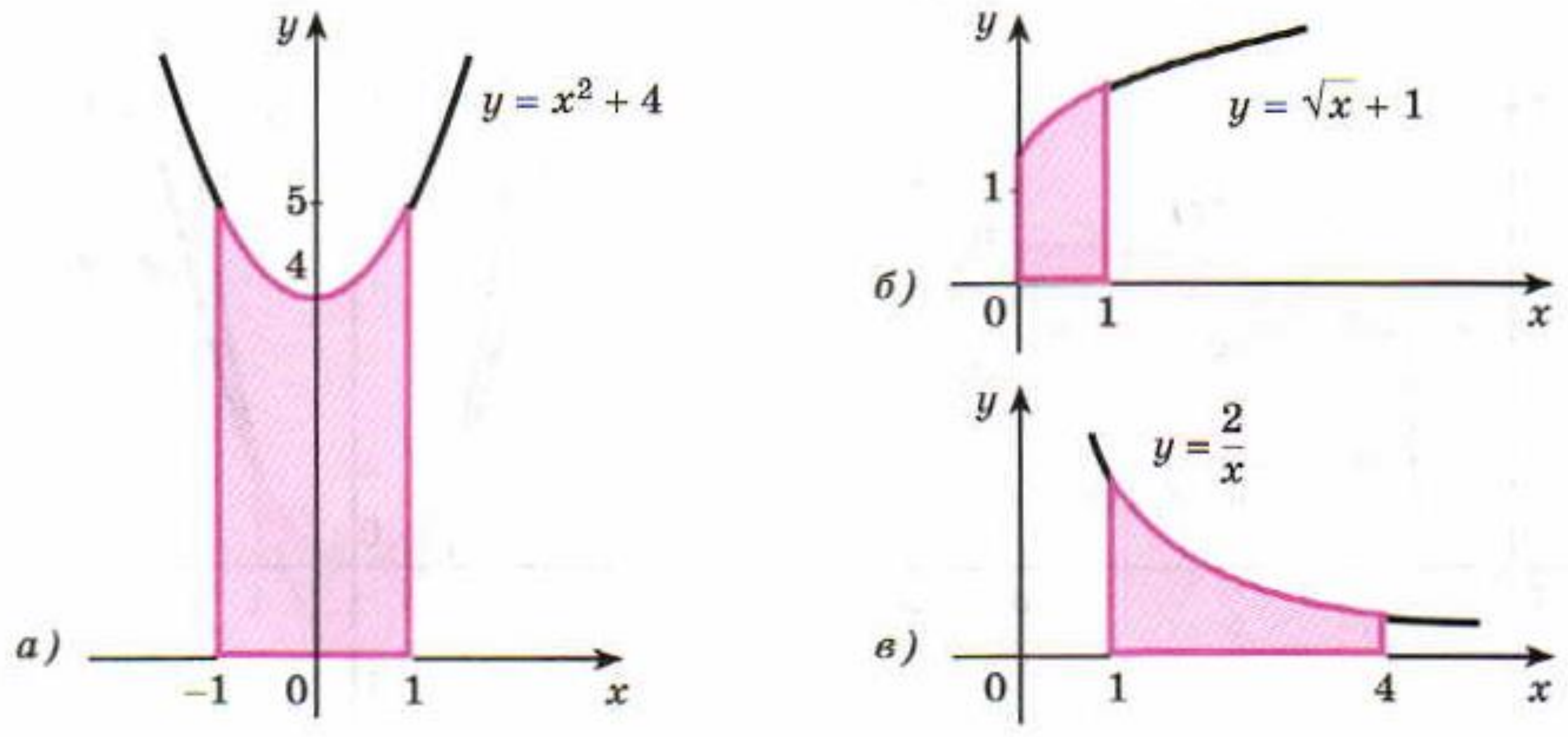
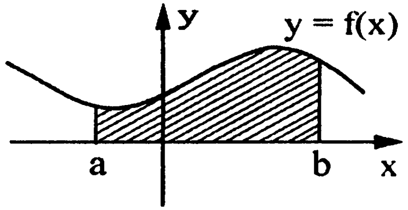
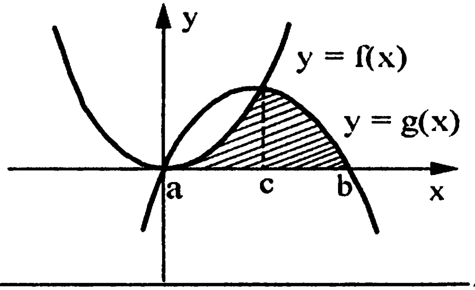
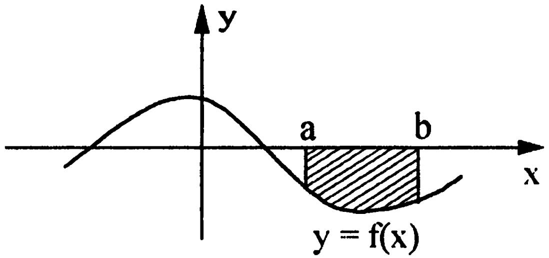
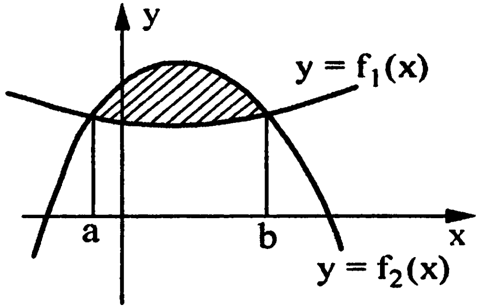


Рис. 164

а) $\int_{-1}^{1}(x^2+4)dx = \left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_{-1}^{1} = 8\frac{2}{3}$ б) $\int_{0}^{1}(\sqrt{x}+1)dx = \left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = 1\frac{2}{3}$

в) $\int_{1}^{4}\frac{2}{x}dx = (2lnx)\Big|_{1}^{4} = 2ln4 - 2ln1 = 2ln4$

Вычисление площадей фигур с помощью интегралов

<table>
<tr><th>№ п.п.</th><th>Рисунок</th><th>Решение</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>$S = \int_a^b f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>$S = \int_a^b (-f(x))dx$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td>$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$</td></tr>
</table>

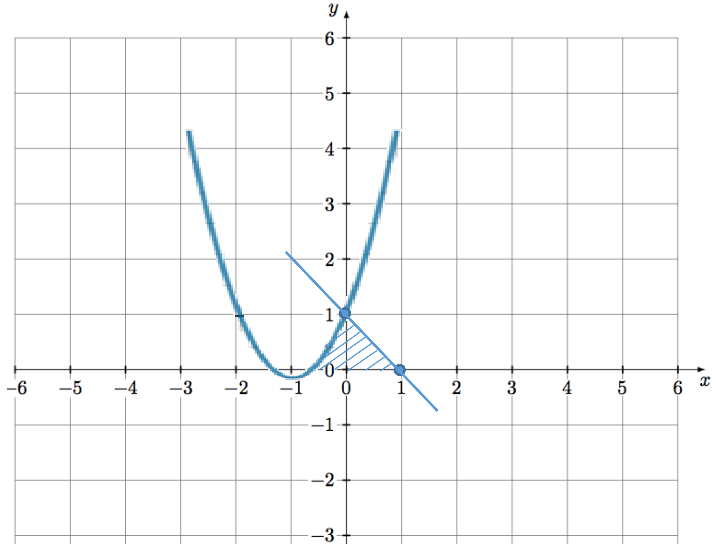
№ 1014

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями и осью OX

$y = (x+1)^2 \qquad y = 1 - x$

Вершина параболы имеет координаты (-1; 0)

Прямая проходит через точки (0; 1) и(1; 0)



$$S = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 dx + \int_0^1 (1 - x)dx =$$

№ 1014 (1)

$$S=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}(1-x)dx=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_{0}^{1}(1-x)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=0-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)-0=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

Алгоритм построения параболы, заданной уравнением $y=ax^2+bx+c$

1) a>0 – ветви вверх; a<0 – ветви вниз; 2) вершина $x_0=\frac{-b}{2a}$; $y_0=y(x_0)$;

3) нули функции – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

Для построения прямой линии достаточно знать координаты двух точек

№ 1014 (3) Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями и осью OX

$$y = 4x - x^2 \qquad y = 4 - x$$

$a < 0$ – ветви вниз; вершина $x_0 = \dfrac{-4}{-2} = 2;\ y_0 = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4;\ (\mathbf{2; 4})$

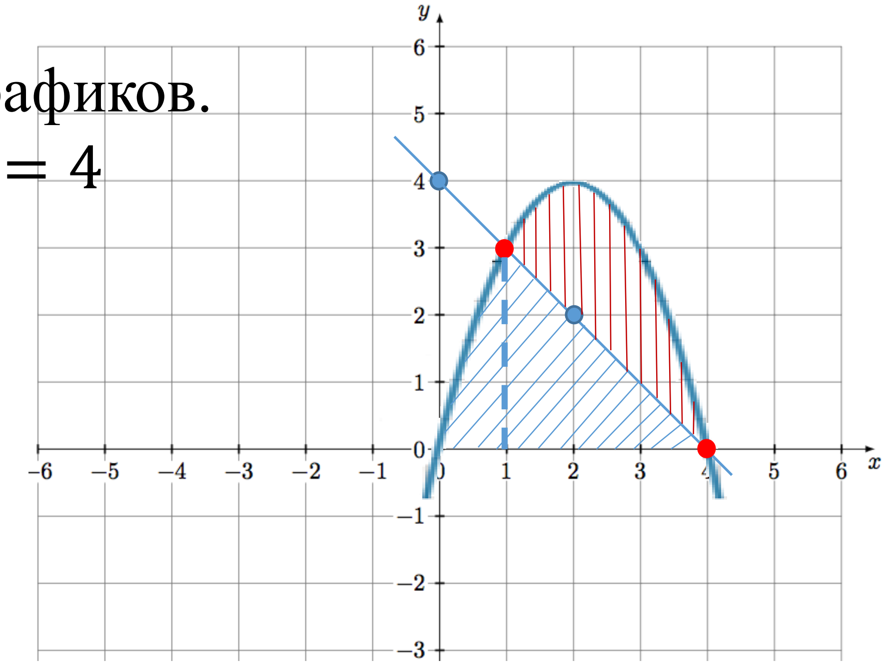
Нули функции (точки пересечения с осью OX) $4x - x^2 = 0; x(4 - x) = 0;\ x_1 = 0; x_2 = 4$
(0; 0) (4; 0)

Прямая проходит через точки (0; 4) и (2; 2) Строим графики.

Дополнительные точки – это точки пересечения графиков.

$$4x - x^2 = 4 - x;\ x^2 - 5x + 4 = 0;\ x_1 = 1; x_2 = 4$$

(1; 3) (4; 0)



$$S_{\text{синяя}} = \int_0^1 (4x - x^2)dx + \int_1^4 (4 - x)dx$$

$$S_{\text{красная}} = \int_1^4 ((4x - x^2) - (4 - x))dx$$

$$S_{\text{синяя}} = \int_0^1 (4x - x^2)dx + \int_1^4 (4 - x\,)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)_1^4 = \left(2 - \frac{1}{3}\right) - 0 +$$

$$+(16 - 8) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 1\frac{2}{3} + 8 - 3\frac{1}{2} = 9\frac{4}{6} - 3\frac{3}{6} = \mathbf{6\frac{1}{6}}$$

$$S_{\text{красная}} = \int_1^4 ((4x - x^2) - (4 - x\,))dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)\,dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)_1^4 =$$

$$= \left(\frac{5 \cdot 16}{2} - \frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3} - 4\right) = 24 - 21\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6} + 4 = 28 - 23\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Домашнее задание: № 1014 (2, 4), № 1034 (1, 3, 6), № 1035 (1, 2)