Понятие вектора в пространстве

Основная литература:

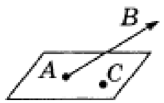
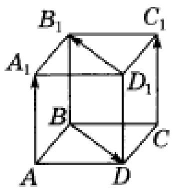
Атанасян Л.С. и др. Геометрия. Учебник для 10-11классов - М.: Просвещение, 2017.

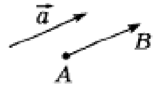
Ершова А.П., Голобородько В.В., Крижановский А.Ф. Тетрадь-конспект по геометрии для 10 класса 2016.

Теоретический материал для самостоятельного изучения:

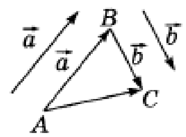
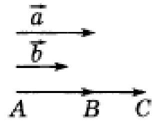
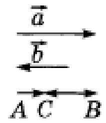
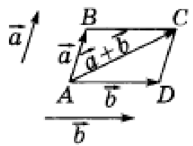
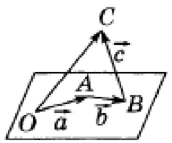
ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Понятие вектора в пространстве

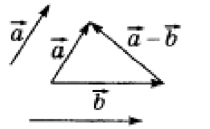
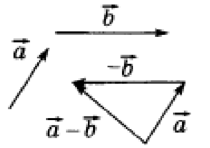
Определение вектора 	**Вектором** называется отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым.** Все обозначения для векторов в пространстве совпадают с аналогичными обозначениями на плоскости.
Определение длины вектора	**Длиной (абсолютной величиной, модулем) ненулевого вектора** называется длина отрезка, изображающего вектор. **Длина нулевого вектора** считается равной нулю.
Определение коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов 	Два ненулевых вектора называются **коллинеарными,** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **сонаправленными,** если они коллинеарны и лучи AB и CD сонаправлены. $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CC_1}$ Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **противоположно направленными,** если они коллинеарны и лучи AB и CD не сонаправлены. $\overrightarrow{BD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1B_1}$
Полезная задача	*Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны.*

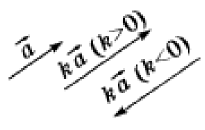
Определение равных векторов 	Векторы называются **равными,** если они сонаправлены и их длины равны. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$
Опорная задача (*о векторе, равном данному*)	**От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.**

Действия с векторами

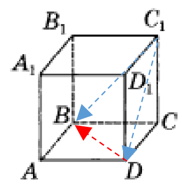
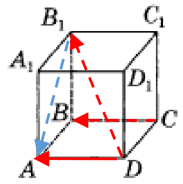
Правила сложения векторов  **для коллинеарных векторов:**  **или** 	**1) Правило треугольника:** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. **Для любых трех точек A, B и C имеет место равенство** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
	**2) Правило параллелограмма (для двух неколлинеарных векторов):** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
	**3) Правило многоугольника (для нескольких векторов):** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$. **Если A_1, A_2, ..., A_n – произвольные точки, то** $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

Свойства сложения векторов	**Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:** 1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ **(переместительный закон);** 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ **(сочетательный закон);** 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Определение противоположных векторов  	Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если они противоположно направлены и их длины равны. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ – противоположные векторы, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.
Определение разности векторов	**Разностью векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$: $\vec{a}=\vec{c}+\vec{b}$.
Правила вычитания векторов   	**1) Правило треугольника:** **если уменьшаемое и вычитаемое – векторы с общим началом, то вектор разности стягивает их концы и направлен от конца вычитаемого к концу уменьшаемого.** **2) Сложение уменьшаемого с вектором, противоположным вычитаемому:** $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

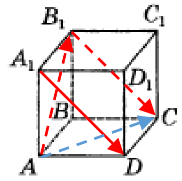
Определение произведения вектора на число  	**Произведением** ненулевого **вектора** $\vec{a}$ **на число** k называется вектор $\vec{b}$ длиной $\lvert k\rvert\lvert\vec{a}\rvert$, сонаправленный с вектором $\vec{a}$ при $k\ge 0$ и противоположно направленный с вектором $\vec{a}$ при $k<0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.
Свойства умножения вектора на число	**1) Для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.** **2) Произведение любого вектора на ноль есть нулевой вектор.** **Для любых чисел k и l и векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы равенства:** 3) $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ **(сочетательный закон);** 4) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ **(первый распределительный закон);** 5) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ **(второй распределительный закон);** 6) $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

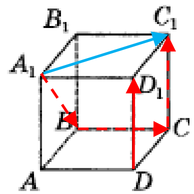
Решение типовых и опорных задач.

Типовая задача   	*В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите разность векторов* *а)* $\overrightarrow{C_1B}-\overrightarrow{C_1D}$; *б)* $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB_1}$. *Решение.* а) $\overrightarrow{C_1B}-\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{DB}$ б) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB_1}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB_1}=\overrightarrow{B_1A}$

Замечание.

Нужно отложить векторы от одной точки, если нужно найти их разность.

Типовая задача  	*В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите сумму векторов:* *а)* $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{A_1D}$; *б)* $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{B_1A_1}$; *в)* $\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD_1}$. *Решение.* а) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{AC}$



б) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{B_1A_1}=\vec{0}$, так векторы равны и противоположны.

в) $\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{A_1C_1}$