Комбинаторика. Урок 1.

Пример 1. Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 9?

	0	2	4
1	10	12	14
2	20	22	24
4	40	42	44
5	50	52	54
9	90	92	94

Клетки таблицы заполняются следующим образом: первая цифра числа равна метке строки, а вторая цифра — метке столбца, поэтому каждое из интересующих нас чисел попадет в определенную клетку таблицы. По строкам и столбцам мы перечислили *все* возможные варианты, значит, искомых чисел будет столько же, сколько клеток в таблице, т. е. $5 \cdot 3 = 15$.

Ответ: 15.

Пример 2. На завтрак Вова может выбрать плюшку, бутерброд, пряник или кекс, а запить их он может кофе, соком или кефиром. Из скольких вариантов завтрака Вова может выбирать?

Решение. Соберем все варианты в такой таблице:

	Плюшка	*Бутерброд*	*Пряник*	*Кекс*
Кофе	Кофе, плюшка	Кофе, бутерброд	Кофе, пряник	Кофе, кекс
Сок	Сок, плюшка	Сок, бутерброд	Сок, пряник	Сок, кекс
Кефир	Кефир, плюшка	Кефир, бутерброд	Кефир, пряник	Кефир, кекс

В ней три строки и четыре столбца, они образуют 12 клеток. Так как выбор еды и напитка происходит *независимо*, то в каждой клетке будет стоять один из возможных вариантов завтрака и, наоборот, любой вариант завтрака будет записан в одной из клеток. Значит, всего вариантов столько же, сколько клеток в таблице.

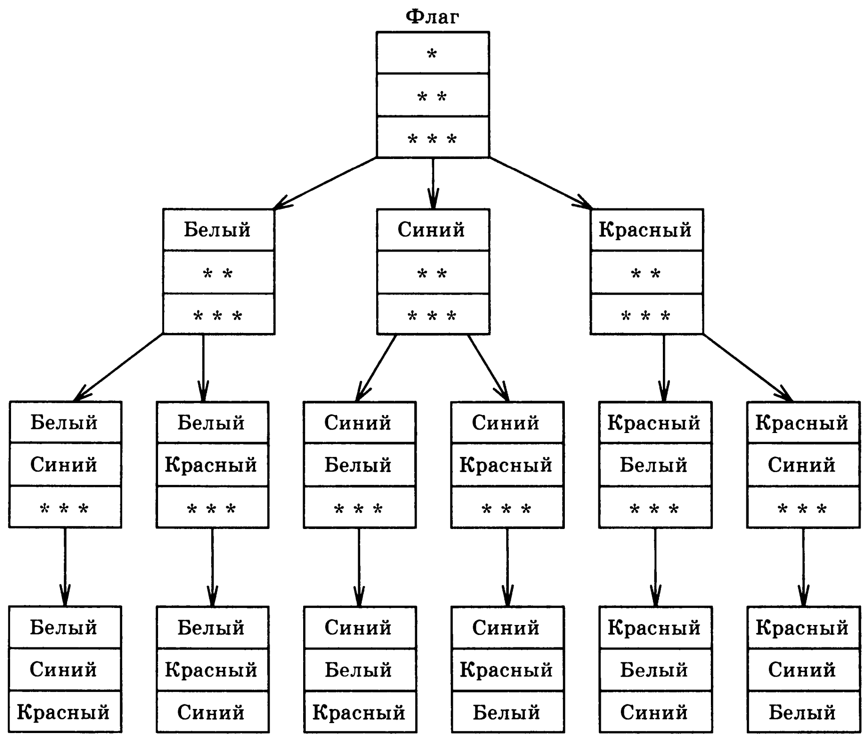
Ответ: 12.

Мы видим, что, хотя примеры 1 и 2 очень разные, их решения совершенно одинаковые. Основаны они на общем *правиле умножения.*

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

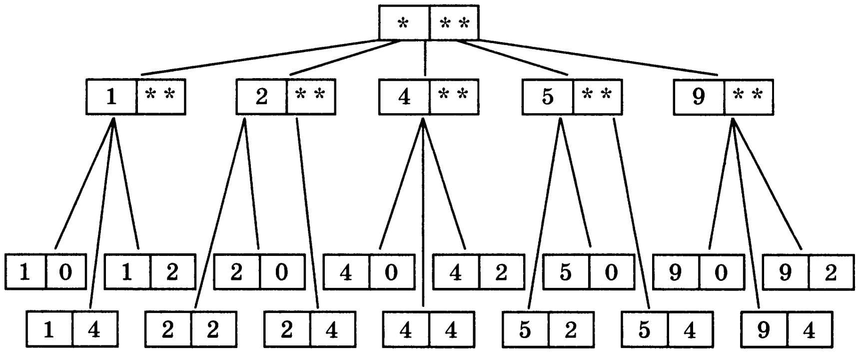
Для того чтобы найти число всех возможных исходов <u>независимого</u> проведения двух испытаний *A* и *B*, следует перемножить число всех исходов испытания *A* и число всех исходов испытания *B*.

Пример 3. Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде трех горизонтальных полос одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой, отличный от других, флаг?



Ответ: 6.

Четное двузначное число,
составленное из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 9



Пример 4. В коридоре висят три лампочки. Сколько имеется различных способов освещения коридора?

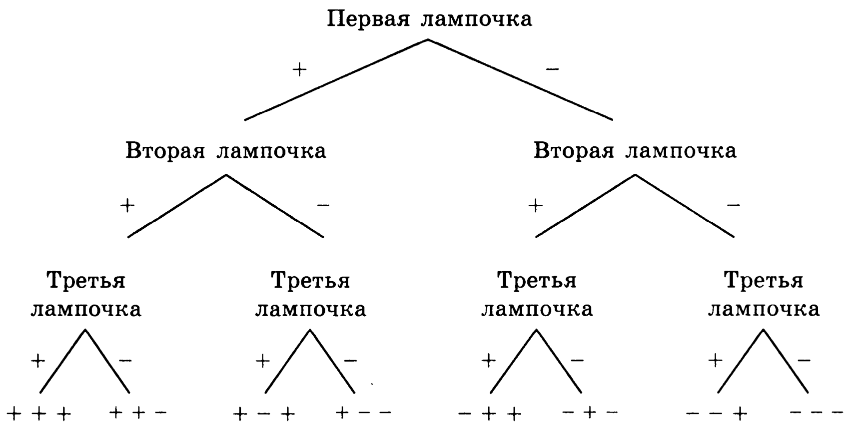
Решение.

Первый способ. Пронумеруем лампочки и будем писать «+» или «–» в зависимости от того, горит или не горит очередная лампочка. Тогда все способы освещения можно просто перечислить:

+ + +, + + –, + – +, – + +, + – –, – + –, – – +, – – –.

Всего 8 способов.

Второй способ. Дерево возможных вариантов представлено на рис. 4. С его помощью находим, что осветить коридор можно 8 способами.



Третий способ. Первая лампочка может или гореть, или не гореть, т. е. имеется два возможных исхода. То же самое относится и ко второй, и к третьей лампочкам. Мы предполагаем, что лампочки горят или нет *независимо* друг от друга. По правилу умножения получаем, что число всех способов освещения равно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Ответ: 8.

Пример 5. В семье — 6 человек, и за столом в кухне стоят 6 стульев. В семье решили каждый вечер, ужиная, рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Решение. Ответ оказывается неожиданно большим: почти два года! Объясним его. Для удобства рассуждений будем считать, что семья (бабушка, дедушка, мама, папа, дочь, сын) будет рассаживаться на стулья поочередно. Нас интересует сколько всего существует различных способов их размещения на стульях.

Предположим, что первой усаживается бабушка. У нее имеется 6 вариантов выбора стула. Вторым садится дедушка и *независимо* выбирает стул из 5 оставшихся. Мама делает свой выбор третьей и выбор у нее будет из 4 стульев. У папы будет уже 3 варианта, у дочки — 2, ну а сын сядет на единственный незанятый стул. По правилу умножения получаем, что всего имеется $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ различных способов размещения. Таким образом, в «игру с рассаживаниями» семья может играть 720 дней, т. е. почти 2 года.

Ответ: 720.

Пример 6. Десять разных писем раскладывают по одному в десять конвертов. Сколько существует способов такого раскладывания?

Решение. Предложенная ситуация отличается от предыдущей (пример 5). Действительно, там были люди и стулья, здесь — письма и конверты. Однако и здесь, и там требуется узнать, сколькими способами можно разместить n предметов на n местах.

Повторяя предыдущее решение, получаем, что всего имеется $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$ способов раскладывания писем по конвертам. Более 3,5 миллионов!

Ответ: 3 628 800.

Определение. Произведение первых подряд идущих n натуральных чисел обозначают $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Знак $n!$ читается как «эн факториал», что в дословном переводе с английского языка означает «состоящий из n множителей». Приведем несколько первых значений для $n!$:

$$1! = 1,$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$
$$5! = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120,$$
$$6! = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720 \text{ и т. д.}$$

ТЕОРЕМА. ***n различным элементам можно присвоить номера от 1 до n ровно $n!$ различными способами.***

Каждый способ нумерации от 1 до n, о котором идет речь в теореме, часто называют *перестановкой* данного n-элементного множества. Действительно, можно считать, что каждая такая нумерация просто расставляет, или *переставляет* все элементы множества в некотором порядке.

Число перестановок множества из n элементов обозначают P_n. Значит, приведенную теорему можно записать в виде формулы:

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Подведем итоги нашего первоначального знакомства с комбинаторными задачами. Мы получили основное правило — *правило умножения*, рассмотрели его геометрическую модель — *дерево возможных вариантов*. Ввели новое понятие — *факториал*, сформулировали *теорему о перестановках*, в которой это понятие используется. Что же касается *независимости* испытаний, для которых применимо правило умножения, то мы подробнее обсудим это понятие в конце следующего параграфа.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Правило умножения

1. а) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9?

б) Сколько среди них чисел, кратных 5?

в) Сколько среди них чисел, кратных 11?

г) Сколько среди них чисел, кратных 3?

2. Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде четырех вертикальных полос, одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный, зеленый. У каждой страны свой, отличный от других, флаг.

а) Сколько всего стран могут использовать такую символику?

б) Сколько всего стран могут использовать такую символику с верхней белой полосой?

в) Сколько всего стран могут использовать такую символику с нижней зеленой полосой?

г) Сколько всего стран могут использовать такую символику с синей и красной полосами, расположенными рядом?

3. В футбольном турнире участвуют несколько команд. Оказалось, что все они для трусов и футболок использовали белый, красный, синий, зеленый или желтый цвета, причем были представлены все возможные варианты.

а) Сколько команд участвовали в турнире?

б) Сколько команд играли в зеленых футболках?

в) У скольких команд футболки и трусы были разного цвета?

г) У скольких команд футболки и трусы были разного цвета, причем трусы были не красные?

4. В контрольной работе будет пять задач — по одной из каждой пройденной темы. Задачи будут взяты из общего списка по 10 задач в каждой теме, а всего было пройдено 5 тем. При подготовке к контрольной Вова решил только по 8 задач в каждой теме. Найдите:

а) общее число всех возможных вариантов контрольной работы;

б) число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все пять задач;

в) число тех вариантов, в которых Вова не сможет решить ни одной задачи;

г) число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все задачи, кроме первой.

5. В клетки квадратной таблицы 2×2 произвольно ставят крестики и нолики.

а) Сколькими способами можно заполнить эту таблицу?

б) В скольких случаях в левой нижней клетке будет стоять крестик?

в) В скольких случаях в верхней левой и нижней правой клетках будут разные значки?

г) Решите задачи пунктов а), б) и в) для таблицы 3×3.

2. Дерево вариантов

6. Вова точно помнит, что в формуле азотной кислоты подряд идут буквы H, N, O и что есть один нижний индекс — то ли двойка, то ли тройка.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов, из которых Вове придется выбирать ответ.

б) Сколько имеется вариантов, в которых индекс равен двойке?

в) Сколько имеется вариантов, в которых индекс стоит не на втором месте?

г) Как изменится дерево вариантов, если Вова помнит, что на первом месте точно стоит буква H, а порядок остальных букв забыл?

7. Одновременно происходят выборы мэра города и префекта округа. На должность мэра выставили свои кандидатуры Алкин, Балкин, Валкин, а на должность префекта — Эшкин, Юшкин, Яшкин.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов голосования и определите с его помощью число различных исходов.

б) В скольких вариантах будет кандидатура Эшкина?

в) В скольких вариантах фамилии кандидатов на должность мэра и на должность префекта состоят из разного числа букв?

г) Как изменятся ответы в пунктах а) и б), если учесть еще кандидата «против всех»?

8. Из четырех тузов поочередно выбирают два.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов.

б) В скольких случаях среди выбранных будет бубновый туз?

в) В скольких случаях вторым выбранным будет туз пик?

г) В скольких случаях тузы будут разного цвета?

9. У Аси есть любимый костюм, в котором она ходит в школу. Она одевает к нему белую, голубую, розовую или красную блузку, а в качестве «сменки» берет босоножки или туфли. Кроме того, у Аси есть три разных бантика (№ 1, 2, 3), подходящих ко всем блузкам.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов Асиной одежды.

б) Сколько дней Ася сможет выглядеть по-новому в этом костюме?

в) Сколько дней она будет ходить в туфлях?

г) Сколько дней она будет ходить в красной блузке и босоножках?

10. Руководство некоторой страны решило сделать свой государственный флаг таким: на одноцветном прямоугольном фоне в одном из углов помещается круг другого цвета. Цвета решено выбрать из трех возможных: красный, желтый, зеленый.

а) Сколько вариантов такого флага существует?

б) Сколько из них флагов с кругом в верхнем правом углу?

в) Сколько флагов не желтого прямоугольного фона?

г) Сколько красных флагов с кругами в нижних углах?

11. Вычислите:

а) $7!$; б) $8!$; в) $6! - 5!$; г) $\frac{5!}{5}$.

12. Вычислите:

а) $\frac{10!}{5!}$; б) $\frac{11!}{5! \cdot 6!}$; в) $\frac{51!}{49!}$; г) $\frac{14!}{7! \cdot 3! \cdot 4!}$.

13. Делится ли $11!$ на:
а) 64; б) 25; в) 81; г) 49?

14. Сколькими нулями оканчивается число:
а) $10!$; б) $12!$; в) $15!$; г) $26!$?

15. Сократите дробь:

а) $\frac{n!}{(n-1)!}$; в) $\frac{(2k+1)!}{(2k-1)!}$;

б) $\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$; г) $\frac{(4m-1)!}{(4m-3)!}$.

16. Упростите выражение:

а) $\frac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!}$;

б) $\frac{1}{(n-2)!} - \frac{(n^3-n)}{(n+1)!}$;

в) $\frac{25m^5 - m^3}{(5m+1)!} \cdot \left(\frac{1}{5 \cdot (5m-2)!}\right)^{-1}$;

г) $\frac{(3k+3)! \cdot k!}{(3k)!} : \frac{(k+3)!(3k+1)}{3!(k^2+5k+6)}$.

17. Решите уравнение:
а) $n! = 7(n-1)!$;
б) $(m+17)! = 420(m+15)!$;
в) $(k-10)! = 77(k-11)!$;
г) $(3x)! = 504(3x-3)!$.

18. а) На дверях четырех одинаковых кабинетов надо повесить таблички с фамилиями четырех заместителей директора. Сколькими способами это можно сделать?

б) В 9 «А» классе в среду 5 уроков: алгебра, геометрия, физкультура, русский язык, английский язык. Сколько можно составить вариантов расписания на этот день?

в) Сколькими способами четыре вора могут разбежаться по одному на все четыре стороны?

г) Адъютант должен развести пять копий приказа генерала пяти полкам. Сколькими способами он может выбрать маршрут доставки копий приказа?

19. У Вовы на обед — первое, второе, третье блюда и пирожное. Он обязательно начнет с пирожного, а все остальное съест в произвольном порядке. Найдите число возможных вариантов обеда.

20. В гостинице семь одноместных номеров, и семеро гостей желают в них разместиться, причем трое заранее зарезервировали конкретные номера. Найдите число способов расселения семи гостей по семи номерам.

21. Одиннадцать футболистов строятся перед началом матча. Первым становится капитан, вторым — вратарь, а остальные — случайным образом. Сколько существует способов построения?

22. Сколькими способами можно обозначить вершины куба буквами A, B, C, D, E, F, G, K?

4. Закрепление пройденного

23. Современные пятиборцы в течение двух дней участвуют в соревновании по следующим видам спорта: конкур (кросс на лошадях), фехтование, плавание, стрельба, бег.

а) Сколько существует вариантов порядка прохождения видов соревнования?

б) Сколько существует вариантов порядка прохождения видов соревнования, если известно, что последним видом должен быть бег?

в) Сколько существует вариантов порядка прохождения видов соревнования, если известно, что последним видом должен быть бег, а первым — конкур?

г) Сколько существует вариантов, в которых конкур и фехтование не проходят подряд?

24. Шесть граней игрального кубика помечены цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Кубик бросают дважды и записывают выпадающие цифры.

а) Найдите число всех возможных вариантов.

б) Укажите те из них, в которых произведение выпавших чисел кратно 10.

в) Составьте таблицу из двух строк. В первой строке запишите суммы выпавших очков, во второй — количество вариантов, в которых выпадает эта сумма.

г) Составьте аналогичную таблицу для модуля разности выпавших очков.

25. На плоскости даны 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Три точки покрасили в рыжий цвет, а остальные — в черный.

а) Сколько можно провести отрезков с разноцветными концами?

б) Сколько можно провести отрезков с рыжими концами?

в) Составьте таблицу из двух строк. В первой строке запишите количество рыжих точек из 10 данных (от 0 до 10), во второй — число отрезков с разноцветными концами при таком способе раскраски.

г) 5 точек покрасили в серый цвет, 2 точки — в бурый и 3 — в малиновый цвет. Сколько можно построить серо-буро-малиновых треугольников?

26. Группа туристов планирует осуществить поход по маршруту Антоново — Борисово — Власово — Грибово. Из Антонова в Борисово можно сплавиться по реке или дойти пешком. Из Борисова во Власово можно дойти пешком или доехать на велосипедах. Из Власова в Грибово можно доплыть по реке, доехать на велосипедах или дойти пешком.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов похода.

б) Сколько всего вариантов похода могут выбрать туристы?

в) Сколько есть полностью не пеших вариантов?

г) Сколько вариантов похода могут выбрать туристы при условии, что хотя бы на одном из участков маршрута они должны использовать велосипеды?

27. В Сети связь происходит через узлы, которые нумеруются восьмизначными номерами (номер, например, 00011122 возможен).

а) Сколько в Сети может быть узлов?

б) Сколько в Сети узлов с суммой цифр номера равной 71?

в) Сколько в Сети узлов с суммой цифр номера меньше 3?

28. Вова услышал в песне, что «...у зим бывают имена...». Он вспомнил семь самых хороших зим своей жизни, написал семь женских имен и решил дать каждой вспомнившейся зиме женское имя из своего списка (всем — разное).

а) Сколькими способами он может это сделать?

б) Сколько способов существует, если первая зима — точно Татьяна, а последняя — несомненно, Анна?

в) Сколько способов существует, если женских имен восемь, а не семь?

г) Сколько способов существует, если имен семь, а зим восемь?

29. Ася помнит, что в ответе задачи на правило умножения для двух испытаний получалось число 48 и что испытания с одним исходом не рассматривались. Ей надо вспомнить число исходов в обоих испытаниях.

а) Из скольких вариантов Асе придется выбирать правильный ответ?

б) Сколько из них вариантов, состоящих из чисел разной четности?

в) Сколько из них вариантов, состоящих из чисел, которые отличаются друг от друга более чем на 10?

г) А сколько всего вариантов, если испытаний было три?